

TOUT EN FICHES

EXERCICES ET MÉTHODES DE

MATHÉMATIQUES

POUR LES SCIENCES DE LA VIE

TOUT EN FICHES

EXERCICES ET MÉTHODES DE

MATHÉMATIQUES

POUR LES SCIENCES DE LA VIE

Claire David

Maître de conférences à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

Sami Mustapha

Professeur à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

Frederi Viens

Professeur associé à Purdue University, États-Unis

Nathalie Capron

Maître de conférences en chimie à l'UPMC
(université Pierre-et-Marie-Curie), Paris

DUNOD

Illustration de couverture : © tr3gi - Fotolia.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	 <p>DANGER LE PHOTOCOPIAGE TUE LE LIVRE</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	---	--

© Dunod, 2014, 2021 pour la nouvelle présentation

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082702-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	XI
Comment utiliser cet ouvrage ?	XII

Partie 1 Calculus

Nombres réels	2
Fiche 1 Les ensembles de nombres	2
Fiche 2 Intervalles, voisinages, bornes	6
Limites	8
Fiche 3 Limite d'une fonction en un point	8
Fiche 4 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$	12
Fiche 5 Propriétés des limites – Opérations sur les limites	14
Fiche 6 Notations de Landau	16
Fonctions numériques	18
Fiche 7 Domaine de définition d'une fonction, graphe	18
Focus <i>La construction de l'ensemble des réels : les coupures de Dedekind</i>	21
Fiche 8 Comment définir une fonction ?	22
Fiche 9 Majorations et minorations	24
Fiche 10 Fonctions monotones	26
Fiche 11 Parité, imparité	28
Fiche 12 Symétries	30
Fiche 13 Fonctions périodiques	32
Fonctions usuelles	33
Fiche 14 Fonctions puissances entières	33
Fiche 15 Fonctions polynômes et fonction valeur absolue	35
Focus <i>John Napier et les tables logarithmiques</i>	38
Fiche 16 La fonction logarithme népérien	39
Fiche 17 La fonction exponentielle	41
Fiche 18 Fonctions puissances « non entières »	43
Focus <i>Leibniz et la fonction exponentielle</i>	44
Fiche 19 Fonctions circulaires	45
Fiche 20 Fonctions hyperboliques	47
Focus <i>L'origine de la trigonométrie</i>	49
Continuité	51
Fiche 21 Continuité d'une fonction en un point	51
Fiche 22 Fonctions continues sur un intervalle	55
Dérivabilité	58
Fiche 23 Dérivabilité en un point	58

Fiche 24	Dérivabilité sur un intervalle	61
Fiche 25	Dérivées successives	65
Fiche 26	Théorème des accroissements finis et théorème de Rolle	67
Fiche 27	Formule de Taylor-Lagrange	71
Fonctions réciproques		72
Fiche 28	Fonctions réciproques	72
Fiche 29	Les fonctions trigonométriques inverses	75
Fiche 30	Les fonctions hyperboliques inverses	79
Développements limités		81
Fiche 31	Développements limités	81
Fiche 32	Formule de Taylor-Young	84
Fiche 33	Développements limités usuels	89
Fiche 34	Opérations algébriques et composition des développements limités	92
Développements asymptotiques		95
Fiche 35	Développements asymptotiques	95
Convexité		96
Fiche 36	Convexité	96
Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre		100
Fiche 37	Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre homogènes	100
Fiche 38	Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre avec second membre	103
Suites		111
Fiche 39	Qu'est-ce qu'une suite ?	111
Fiche 40	Les différents types de suites	114
Focus <i>Suites arithmético-géométriques et finance</i>		119
Fiche 41	Étude d'une suite	120
Fiche 42	Majorants, minorants d'une suite réelle Croissance et décroissance	123
Fiche 43	Techniques d'étude des suites réelles	125
Fiche 44	Convergence	127
Fiche 45	Convergence des suites monotones	130
Fiche 46	Opérations sur les limites de suites	132
Fiche 47	Convergence des suites homographiques réelles	135
Fiche 48	Suites extraites	140
Fiche 49	Suites de Cauchy	142
Fiche 50	Comparaison des suites réelles	144
Focus <i>Suites et systèmes dynamiques – L'attracteur de Hénon</i>		148
Séries		149
Fiche 51	Séries	149
Fiche 52	Quelques séries remarquables	151
Fiche 53	Critères de convergence pour les séries à termes positifs	153

Intégrales	155
Fiche 54 Qu'est-ce qu'une intégrale ?	155
Fiche 55 Intégrale d'une fonction en escaliers	157
Fiche 56 Intégrale d'une fonction continue par morceaux	162
Fiche 57 Calcul intégral	168
Fiche 58 Primitives de fractions rationnelles	174
Fiche 59 Calcul approché d'intégrales	176
Focus <i>Intégrale de Riemann vs intégrale de Lebesgue</i>	183
Fiche 60 Intégrales généralisées	185
Fiche 61 Intégrales doubles sur un pavé du plan \mathbb{R}^2	193
<i>Exercices d'entraînement</i>	195

Partie 2 Algèbre

Le plan complexe – Les nombres complexes	206
Fiche 62 Le corps des nombres complexes	206
Focus <i>Les nombres complexes</i>	209
Fiche 63 Représentation géométrique des nombres complexes	211
Fiche 64 Inversion des nombres complexes	214
Fiche 65 Propriétés fondamentales des nombres complexes	216
Fiche 66 Complément : les polynômes de Tchebychev	218
Fiche 67 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes	221
Fiche 68 Factorisation des polynômes dans le corps \mathbb{C}	224
Fiche 69 Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples	229
Fiche 70 Transformations du plan : translations, homothéties	240
Fiche 71 Transformations du plan : rotations	242
Fiche 72 Transformations du plan : similitudes	244
Focus <i>Transformations complexes, fractales, et représentations de la nature</i>	248
Focus <i>L'origine des matrices</i>	250
Matrices	252
Fiche 73 Matrices de taille 2×2	252
Fiche 74 Déterminant de matrices de taille 2×2	254
Fiche 75 Matrices de taille 3×3	256
Fiche 76 Déterminant de matrices de taille 3×3	259
Fiche 77 Matrices de taille $m \times n$	262
Fiche 78 Opérations sur les matrices	264
Fiche 79 Matrices remarquables	266
Fiche 80 Introduction aux déterminants de matrices de taille $n \times n$	270
Fiche 81 Inversion des matrices carrées	272
Focus <i>Les matrices et leurs applications</i>	276
Fiche 82 Systèmes linéaires	278

Focus	<i>Matrices, systèmes linéaires et chimie</i>	281
Fiche 83	Vecteurs	282
Fiche 84	Barycentres	286
Fiche 85	Droites, plans	290
Fiche 86	Produit scalaire	293
Focus	<i>Produit scalaire, espaces fonctionnels et calcul numérique</i>	297
Fiche 87	Produit vectoriel	298
Fiche 88	Aires et volumes	300
Focus	<i>Géométrie euclidienne – ou non ? Encore des matrices !</i>	302
Transformations linéaires du plan		304
Fiche 89	Bases et transformations linéaires du plan	304
Fiche 90	Changement de base en dimension 2, et déterminant d'une application linéaire	308
Fiche 91	Conjugaison – Matrices semblables de taille 2×2	310
Fiche 92	Opérateurs orthogonaux en dimension 2	312
Fiche 93	Rotations vectorielles du plan	314
Transformations linéaires de l'espace		317
Fiche 94	Bases de l'espace \mathbb{R}^3	317
Fiche 95	Transformations linéaires de l'espace \mathbb{R}^3	318
Fiche 96	Changement de base en dimension 3	322
Fiche 97	Conjugaison – Matrices semblables de taille 3×3	324
Fiche 98	Opérateurs orthogonaux de l'espace \mathbb{R}^3	326
Fiche 99	Rotations vectorielles de l'espace \mathbb{R}^3	328
L'espace \mathbb{R}^n		330
Fiche 100	Vecteurs en dimension $n, n \geq 2$	330
Fiche 101	Espace engendré par une famille de vecteurs Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n	332
Fiche 102	Transformations linéaires de l'espace \mathbb{R}^n	335
Fiche 103	Changement de base	339
Fiche 104	Conjugaison – Matrices semblables de taille $n \times n$	341
Fiche 105	Réduction des matrices carrées	343
Focus	<i>Groupe spécial orthogonal et cristallographie</i>	347
Focus	<i>Diagonalisation – La toupie de Lagrange (et de Michèle Audin)</i>	349
Espaces vectoriels		350
Fiche 106	Les espaces vectoriels	350
Fiche 107	Sous-espaces vectoriels	354
Fiche 108	Somme de sous-espaces vectoriels	356
Fiche 109	Projecteurs, symétries	357
<i>Exercices d'entraînement</i>		359

Partie 3 Probabilités

Analyse Combinatoire	368
Fiche 110 Factorielle	368
Fiche 111 Arrangements	370
Fiche 112 Combinaisons	372
Espaces probabilisés	376
Fiche 113 Espaces probabilisés	376
Focus <i>Les jeux de hasard</i>	380
Focus <i>Lancer de dés</i>	382
Fiche 114 Conditionnement	384
Fiche 115 Indépendance	388
Probabilités discrètes	389
Fiche 116 Variable aléatoire discrète et loi associée	389
Fiche 117 Fonction de répartition	392
Fiche 118 La loi de Bernoulli, de paramètre $p \in [0, 1]$	394
Fiche 119 La loi uniforme (sur un ensemble de réels)	396
Fiche 120 La loi binomiale	397
Fiche 121 La loi géométrique	400
Fiche 122 La loi binomiale négative	404
Focus <i>Les tortues des Galápagos</i>	406
Fiche 123 La loi hypergéométrique	409
Fiche 124 La loi de Poisson	412
Fiche 125 Somme de variables aléatoires discrètes	416
Fiche 126 Espérance	419
Fiche 127 Moment d'ordre r , $r \in \mathbb{N}^*$, d'une variable aléatoire discrète	425
Focus <i>Application de l'inégalité de Markov</i>	427
Focus <i>Variations de température</i>	429
Fiche 128 Variance, écart-type	431
Focus <i>Inégalité de Tchebychev et concentration de mesure</i>	439
Fiche 129 Covariance	440
Fiche 130 Couples de variables aléatoires discrètes	445
Fiche 131 Un théorème limite pour les variables aléatoires discrètes : la loi des grands nombres	447
Probabilités continues	449
Fiche 132 Du discret au continu : variables aléatoires continues	449
Fiche 133 Variables à densité	450
Fiche 134 Lois uniformes	457
Focus <i>Le coût d'un déminage avec la loi uniforme</i>	460
Fiche 135 Lois exponentielles	461
Fiche 136 Lois normales (ou gaussiennes)	465
Fiche 137 Couples de variables aléatoires réelles	472

Fiche 138	Quelques résultats concernant la somme de variables aléatoires continues	475
Fiche 139	Lois Gamma	480
Focus	<i>Dans l'attente d'un $n^{\text{ième}}$ client</i>	487
	<i>Exercices d'entraînement</i>	489
Annexes	Formulaire de trigonométrie	493
	Dérivées usuelles	495
	Dérivées des fonctions réciproques usuelles	496
	Primitives usuelles	497
	Limites usuelles des fonctions puissances	498
	Rang d'une matrice	499
	<i>Bibliographie</i>	500
	<i>Index</i>	502

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux étudiants en licences de Sciences de la Vie et de la Terre, ou en classes préparatoires. Il se base sur nos cours donnés en première année de Licence à l'UPMC (université Pierre-et-Marie-Curie).

Face aux demandes croissantes de nos étudiants, qui recherchaient un ouvrage de référence complet mais abordable, ainsi que des exercices d'application corrigés, nous nous sommes lancés dans la conception de ce livre qui, nous l'espérons, sera un outil utile pour les générations d'étudiants à venir.

Cet ouvrage est donc le fruit d'un compromis : dans un volume condensé, nous avons essayé de donner suffisamment d'éléments recouvrant l'ensemble des mathématiques des premières années d'études supérieures. Il correspond aussi à l'arrivée des nouveaux programmes universitaires et des classes préparatoires. Pour mieux assurer la jonction avec les mathématiques enseignées au lycée, nous avons opté, pour la première partie d'analyse, relative à l'étude des fonctions, à une présentation de type « Calculus », inspirée de l'esprit des « textbooks » anglo-saxons, qui permet d'aborder plus facilement le reste du programme, plus « classique », sur les suites et le calcul intégral. Pour l'algèbre, la présentation reprend celle de l'ouvrage *Calcul Vectoriel* (Collection *Sciences Sup*), en allant un peu plus loin : \mathbb{R}^n , réduction, espaces vectoriels. En ce qui concerne les probabilités, nous allons jusqu'aux probabilités continues, indispensables aux filières SVT, mais qui peuvent aussi intéresser les autres publics.

Malgré tout le soin apporté à la rédaction, nous demandons l'indulgence du lecteur pour les éventuelles imperfections qui pourraient subsister ; qu'il n'hésite pas à nous les signaler.

Claire David et Sami Mustapha
Claire.David@upmc.fr
Sami.Mustapha@imj-prg.fr

Remerciements

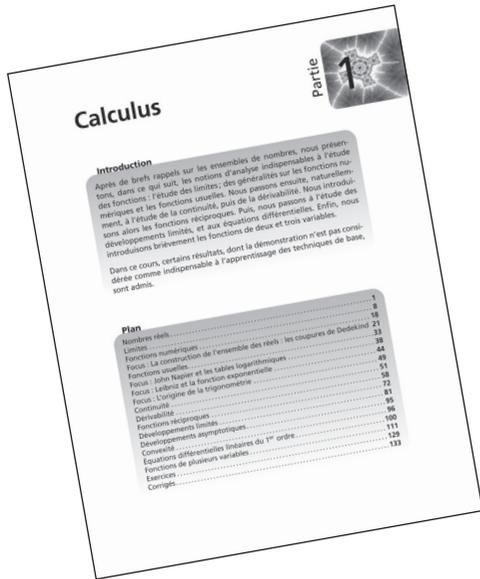
Nous remercions vivement toutes les personnes dont la relecture et les remarques ont contribué à améliorer la version initiale du manuscrit :

les membres du comité de lecture, pour leur relecture extrêmement minutieuse et leurs remarques très pertinentes ;

- Maryse Beguin, laboratoire Jean Kuntzman, Institut Polytechnique de Grenoble.
- Sylvie Benzoni, université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan.
- Laurent Di Menza, université de Reims, laboratoire de mathématiques de Reims (LMR).
- Jean-Pierre Escofier, université de Rennes, Institut mathématique de Rennes.
- Sandrine Gachet, professeur de mathématiques, lycée Gustave Eiffel, Dijon.
- Chloé Mullaert, professeur de mathématiques, lycée Paul Valéry, Paris.
- Laure Quivy, ENS Cachan et université Paris XIII, Centre de mathématiques et leurs applications (CMLA).
- Olivier Sellès, professeur de mathématiques, lycée Saint-Louis, Paris.
- Lamia Attouche, étudiante à l'UPMC, Paris.
- Alexis Prel, étudiant à l'UPMC, Paris.

mais aussi Albert Cohen, Ramona Anton, Sylvie Delabrière, Patrick Polo, Adnène Benabdesselem, Matthieu Solnon, Eugénie Poulon, Daniel Hoehener, Julien Piera Vest.

Comment utiliser cet ouvrage ?



Un découpage en trois grandes parties : Calculus, Algèbre, Probabilités

140 fiches de cours

Elles présentent les notions essentielles du cours

fiche 1

Les ensembles de nombres

fiche 1

Un ensemble E est une collection d'objets, qui constituent les « éléments » de l'ensemble. Le nombre d'éléments de l'ensemble peut être fini, ou infini.

1. Notation

Pour décrire l'ensemble, on utilise des accolades, à l'intérieur desquelles on écrit les éléments de l'ensemble.

Suivant les cas, on peut, simplement, placer à l'intérieur des accolades, la liste des éléments de l'ensemble ; ainsi, dans le cas d'un ensemble E avec un nombre fini d'éléments e_1, \dots, e_n , où n est un nombre entier positif, on écrit :

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

ou bien, dans le cas d'un ensemble d'éléments vérifiant une propriété donnée \mathcal{P} , on écrit

$$E = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}$$

ou encore $\{x, \mathcal{P}(x)\}$

ce qui désigne ainsi l'ensemble des éléments x tels que la propriété \mathcal{P} soit vérifiée pour x .

Exemples

- $\{1, 2, 3, 4\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres 1, 2, 3 et 4.
- $\{3, 4, 5, 6, \dots\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 3.
- $\{x \in \mathbb{N}, 2, 3, 4, 5, 6 \mid x \text{ est impair}\} = \{1, 3, 5\}$.

► Les entiers naturels
L'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire des entiers positifs ou nuls, est noté \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

► Les nombres pairs
L'ensemble des entiers naturels pairs est noté $2\mathbb{N}$:

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$$

► $k\mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$
Étant donné un entier naturel non nul k , $k\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels multiples de k :

$$k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$$

► Les entiers relatifs
L'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire des entiers qui sont soit positifs ou nuls, soit négatifs ou nuls, est noté \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

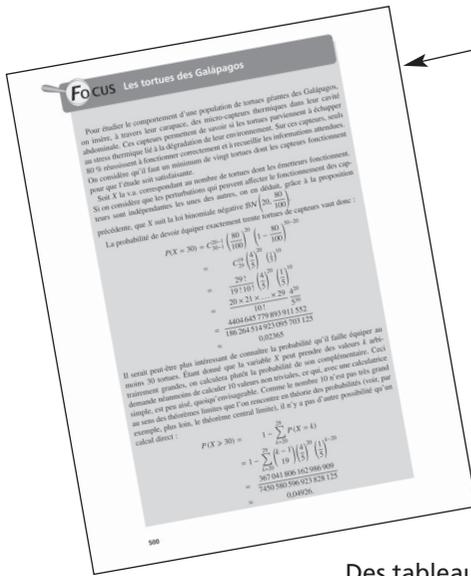
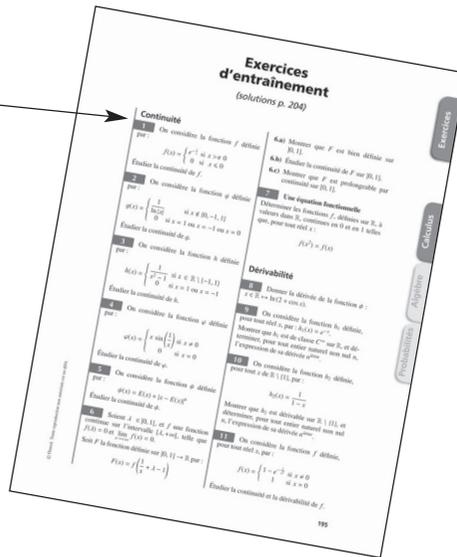
© David, InterEditions/maurand.com/editions

De très nombreux exemples

Un repérage facile

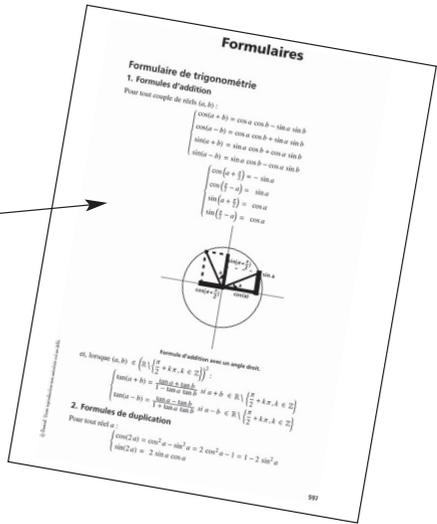
Les fiches sont regroupées par thème

À la fin de chaque partie, des **exercices corrigés** pour s'entraîner. Les corrigés sont disponibles sur le site dunod.com



Des **focus** pour découvrir des **applications des mathématiques** ou approfondir un point du cours

Des **tableaux et formules** en annexe



www Tous les corrigés sont disponibles en téléchargement sur le site dunod.com à partir de la page de présentation de l'ouvrage.

Calculus

Partie

1



Introduction

Après de brefs rappels sur les ensembles de nombres, nous présentons, dans ce qui suit, les notions d'analyse indispensables à l'étude des fonctions : l'étude des limites ; des généralités sur les fonctions numériques et les fonctions usuelles. Nous passons ensuite, naturellement, à l'étude de la continuité, puis de la dérivabilité. Nous introduisons alors les fonctions réciproques. Puis, nous passons à l'étude des développements limités, et aux équations différentielles. Enfin, nous introduisons brièvement les fonctions de deux et trois variables.

Dans ce cours, certains résultats, dont la démonstration n'est pas considérée comme indispensable à l'apprentissage des techniques de base, sont admis.

Plan

Nombres réels.....	2
Limites.....	8
Fonctions numériques.....	18
<i>Focus : La construction de l'ensemble des réels : les coupures de Dedekind.....</i>	<i>21</i>
Fonctions usuelles.....	33
<i>Focus : John Napier et les tables logarithmiques.....</i>	<i>38</i>
<i>Focus : Leibniz et la fonction exponentielle.....</i>	<i>44</i>
<i>Focus : L'origine de la trigonométrie.....</i>	<i>49</i>
Continuité.....	51
Dérivabilité.....	58
Fonctions réciproques.....	72
Développements limités.....	81
Développements asymptotiques.....	95
Convexité.....	96
Équations différentielles linéaires du 1 ^{er} ordre.....	100
Suites.....	111
<i>Focus : Suites arithmético-géométriques et finance.....</i>	<i>119</i>
<i>Focus : Suites et systèmes dynamiques – L'attracteur de Hénon.....</i>	<i>148</i>
Séries.....	149
Intégrales.....	149
<i>Focus : Intégrale de Riemann vs intégrale de Lebesgue.....</i>	<i>183</i>
Exercices d'entraînement.....	195

Les bonus web sur Dunod.com

 Les corrigés des exercices sont consultables sur dunod.com sur la page de présentation de l'ouvrage.

Les ensembles de nombres

Un **ensemble** E est une collection d'objets, qui constituent les « éléments » de l'ensemble. Le nombre d'éléments de l'ensemble peut être fini, ou infini.

1. Notation

Pour décrire l'ensemble, on utilise des accolades, à l'intérieur desquelles on écrit les éléments de l'ensemble.

Suivant les cas, on peut, simplement, placer, à l'intérieur des accolades, la liste des éléments de l'ensemble ; ainsi, dans le cas d'un ensemble E avec un nombre fini d'éléments e_1, \dots, e_n , où n est un nombre entier positif, on écrit :

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

ou bien, dans le cas d'un ensemble d'éléments vérifiant une propriété donnée \mathcal{P} , on écrit

$$E = \left\{x \mid \mathcal{P}(x)\right\} \quad \text{ou encore} \quad \{x, \mathcal{P}(x)\} \quad \text{ou encore} \quad \{x; \mathcal{P}(x)\}$$

ce qui désigne ainsi l'ensemble des éléments x tels que la propriété \mathcal{P} soit vérifiée pour x .

Exemples

1. $\{1, 2, 3, 4\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres 1, 2, 3 et 4.
2. $\{3, 4, 5, 6, \dots\}$ est un ensemble. Ses éléments sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 3.
3. $\left\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mid x \text{ est impair}\right\} = \{1, 3, 5\}$.

► Les entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire des entiers positifs ou nuls, est noté \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

► Les nombres pairs

L'ensemble des entiers naturels pairs est noté $2\mathbb{N}$:

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$$

► $k\mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$

Étant donné un entier naturel k , $k\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels multiples de k :

$$k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$$

► Les entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire des entiers qui sont soit positifs ou nuls, ou négatifs ou nuls, est noté \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

► $\alpha\mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$

Étant donné un réel α , $\alpha\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des réels de la forme αk , où k est un entier :

$$\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple

$$2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

► Les nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers relatifs, avec $q \neq 0$, est noté \mathbb{Q} .

► Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} .

► $\overline{\mathbb{R}}$

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est ce que l'on appelle la « droite réelle achevée », ou encore, l'adhérence de \mathbb{R})

► La notation « * »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « * », cela signifie que l'on exclut 0 ; ainsi, \mathbb{N}^* désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls ; \mathbb{Z}^* désigne l'ensemble des entiers relatifs non nuls ; etc.

► La notation « + »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « + », cela signifie que l'on ne considère que les nombres positifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^+ (qui est aussi égal à \mathbb{N}), désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls ; \mathbb{R}^+ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

► La notation « - »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « - », cela signifie que l'on ne considère que les nombres négatifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^- (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}$), désigne l'ensemble des entiers négatifs ou nuls ; \mathbb{R}^- désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ; etc.

► La notation « *₊ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « *₊ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^*_{+} (qui est aussi égal à \mathbb{N}^*), désigne l'ensemble des entiers strictement positifs ; \mathbb{R}^*_{+} désigne l'ensemble des réels strictement positifs ; etc.

► La notation « *₋ »

Lorsque l'on écrit l'un des ensembles précédents avec l'exposant « *₋ », cela signifie que l'on ne considère que les nombres strictement positifs de cet ensemble ; ainsi, \mathbb{Z}^*_{-} (qui est aussi égal à $-\mathbb{N}^*$), désigne l'ensemble des entiers strictement négatifs ; \mathbb{R}^*_{-} désigne l'ensemble des réels strictement négatifs ; etc.

Propriété

$$\text{On a : } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

où le symbole \subset signifie « inclus dans ».

2. Les ensembles

► Ensemble vide

Un ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide**, et noté \emptyset .

Exemple

$\{n \in 3\mathbb{N}, n \text{ pair}\}$ ne contient aucun nombre : c'est l'ensemble vide.

► Intersection d'ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **intersection**, notée $E_1 \cap E_2$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E_1 et à E_2 :

$$E_1 \cap E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$$

► Union d'ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **union**, notée $E_1 \cup E_2$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E_1 , ou à E_2 :

$$E_1 \cup E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$$

► Différence de deux ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **différence**, notée $E_1 \setminus E_2$, est l'ensemble E_1 privé de E_2 :

$$E_1 \setminus E_2 = \{x, x \in E_1 \text{ et } x \notin E_2\}$$

Exemples

1. $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ est l'ensemble des réels différents de 1 et de 2.
2. $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas multiples de π .

► Complémentaire d'un ensemble

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 tels que E_2 soit inclus dans E_1 (que l'on écrit $E_2 \subset E_1$), l'ensemble $E_1 \setminus E_2$ est le complémentaire de E_2 dans E_1 , noté $\complement_{E_1} E_2$:

$$\complement_{E_1} E_2 = E_1 \setminus E_2$$

Exemple

$$\complement_{\mathbb{R}} \{0\} = \mathbb{R}^*$$

► Produit cartésien de deux ensembles

Étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2$, est l'ensemble des couples d'éléments de la forme (x_1, x_2) , où le premier élément x_1 appartient à E_1 , et le second, x_2 , à E_2 :

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

Exemples

1. $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in \mathbb{R} \text{ et } x_2 \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des couples de réels.
2. $\mathbb{N}^2 = \{(n_1, n_2), n_1 \in \mathbb{N} \text{ et } n_2 \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des couples d'entiers naturels.

► Produit cartésien de trois ensembles

Étant donnés trois ensembles E_1 , E_2 et E_3 , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times E_2 \times E_3$, est l'ensemble des triplets d'éléments de la forme (x_1, x_2, x_3) , où le premier élément x_1 appartient à E_1 , le second, x_2 , à E_2 , et le troisième, x_3 , à E_3 :

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(x_1, x_2, x_3), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \text{ et } x_3 \in E_3\}$$

► Produit cartésien de n ensembles, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Étant donnés un entier naturel $n \geq 2$, et n ensembles E_1, \dots, E_n , leur **produit cartésien**, noté $E_1 \times \dots \times E_n$, est l'ensemble des n -uplets d'éléments de la forme (x_1, \dots, x_n) , où $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$:

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n), x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}$$

► Application

Étant donnés deux ensembles E et F , une **application** φ de E dans F associe, à chaque élément de E , un et un seul élément de F . E est l'ensemble de départ, F , celui d'arrivée.

Pour tout élément x de E , l'unique élément de F ainsi mis en relation avec x par l'application φ est noté $\varphi(x)$, et appelé image de x . x est un antécédent de $\varphi(x)$. On écrit :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

Exemples

1.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , appelée application identité de \mathbb{N} .

2.

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

est une application de \mathbb{Q} dans \mathbb{Q} .

► Fonction

Étant donnés deux ensembles de nombres E et F , une **fonction** f de E dans F associe, à chaque élément x de E , au plus un élément de F appelé alors image de x par f (ce qui signifie donc que tous les éléments de E n'ont pas nécessairement une image par f). E est l'ensemble de départ, F , celui d'arrivée. L'ensemble des éléments de E possédant une image par f est appelé domaine de définition de f , et noté \mathcal{D}_f . Elle permet de définir une application de \mathcal{D}_f dans F .

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dont le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Elle permet de définir une application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans \mathbb{R} .

Intervalles, voisinages, bornes

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée, appelée **droite des réels**, où il faut pouvoir se repérer. À cet effet, on introduit les notions d'intervalle et de voisinage d'un point.

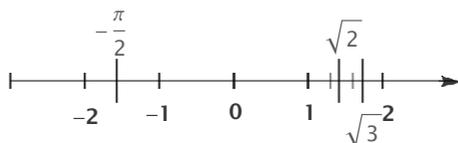


Figure 2.1 - La droite des réels.

1. Intervalles

► Intervalle fermé et borné (ou segment)

On appelle intervalle fermé et borné (ou segment) tout ensemble de la forme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$$

► Intervalle ouvert

On appelle intervalle ouvert tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

ou $] -\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\} \quad , \quad b \in \mathbb{R}$

ou encore $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$

où $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de réels.

► Intervalle ouvert et borné

On appelle intervalle ouvert et borné tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

► Intervalle semi-ouvert et borné

On appelle intervalle semi-ouvert et borné tout ensemble de la forme

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$$

ou $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$

► Intervalle fermé

Par convention, tout ensemble de la forme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

ou $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\} \quad , \quad b \in \mathbb{R}$

est considéré comme étant un intervalle fermé.

► Ensemble vide

L'ensemble, noté \emptyset , qui ne contient aucun nombre réel, est aussi un intervalle, appelé ensemble vide.

► Singleton

On appelle singleton un ensemble ne contenant qu'un seul élément, et qui est donc de la forme $\{a\}$, où a est un nombre réel.

► Intervalle

On appelle intervalle de \mathbb{R} l'un des ensembles définis ci-dessus, ou bien \mathbb{R} tout entier.



Un singleton est un intervalle fermé (le singleton $\{a\}$ est donc assimilé à l'intervalle fermé $[a, a]$).

► Adhérence d'un intervalle

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Son adhérence \bar{I} est l'ensemble tel que :

- si I est un segment, alors $\bar{I} = I$;
- si I est de la forme $]a, b[$ ou $]a, b]$ ou $[a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\bar{I} = [a, b]$;
- si I est de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} = [a, +\infty[\cup \{+\infty\}$;
- si I est de la forme $] - \infty, a[$ ou $] - \infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} =] - \infty, a] \cup \{-\infty\}$;
- si I l'ensemble vide \emptyset , alors $\bar{I} = \emptyset$.

2. Voisinage

► Voisinage d'un point

On appelle voisinage d'un point a de \mathbb{R} un sous-ensemble de \mathbb{R} contenant un intervalle ouvert de la forme $]a - \eta, a + \eta[$, où η est un réel strictement positif et tel que $\eta < a$.



On peut étendre la notion de voisinage à $+\infty$ ou $-\infty$; ainsi, un voisinage de $+\infty$ est une partie de \mathbb{R} contenant un intervalle ouvert de la forme $]x_0, +\infty[$, où x_0 est un nombre réel quelconque. De même, un voisinage de $-\infty$ est une partie de \mathbb{R} contenant un intervalle ouvert de la forme $] - \infty, x_0[$, où x_0 est un nombre réel quelconque.

3. Les intervalles de \mathbb{R}

Dans ce qui suit, a, b, x_0 sont des réels tels que $a < b$. Le tableau suivant reprend les différents types d'intervalles de \mathbb{R} .

$[a, b]$	Segment
$]a, b[$	Intervalle ouvert et borné
$]a, b]$	Intervalle semi-ouvert et borné (ouvert à gauche, fermé à droite)
$[a, b[$	Intervalle semi-ouvert et borné (fermé à gauche, ouvert à droite)
\emptyset	Ensemble vide
$\{a\}$	Singleton
$]x_0, +\infty[$	Voisinage de $+\infty$
$[x_0, +\infty[$	
$] - \infty, x_0[$	Voisinage de $-\infty$
$] - \infty, x_0]$	
$] - \infty, +\infty[$	\mathbb{R} tout entier

Limite d'une fonction en un point

1. Limite finie d'une fonction en un point

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $\lim_a f = \ell$.

Exemple

On considère la fonction qui, à tout x de $] -1, 1[$, associe $\sqrt{1 - x^2}$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - x^2} = 0$$

► Notation 0^+

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **tend vers 0^+ en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$ ou $\lim_a f = 0^+$.

Lorsque $+\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^+ en $+\infty$** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x > A \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ ou $\lim_{+\infty} f = 0^+$.

Lorsque $-\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^+ en $-\infty$** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en restant à valeurs négatives, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant positif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x < -A \Rightarrow 0 \leq f(x) < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$ ou $\lim_{-\infty} f = 0^+$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$



On utilisera aussi la notation 0^+ pour indiquer que l'on tend vers zéro par valeurs supérieures.

► Notation 0^-

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **tend vers 0^- en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^-$ ou $\lim_a f = 0^-$.

Lorsque $+\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^- en $+\infty$** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x > A \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$ ou $\lim_{+\infty} f = 0^-$.

Lorsque $-\infty$ est une borne de I , on dit que f **tend vers 0^- en $-\infty$** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en restant à valeurs négatives, $f(x)$ tend vers zéro, mais en restant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, x < -A \Rightarrow -\varepsilon < f(x) \leq 0$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ ou $\lim_{-\infty} f = 0^-$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^4 = 0^-$$



On utilisera aussi la notation 0^- pour indiquer que l'on tend vers zéro par valeurs inférieures.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0^-$$

► Notation a^+ , $a \in \mathbb{R}$

a étant un réel, la notation a^+ signifie que l'on tend vers a par valeurs supérieures.

► Notation a^- , $a \in \mathbb{R}$

a étant un réel, la notation a^- signifie que l'on tend vers a par valeurs inférieures.

2. Limite infinie d'une fonction en un point

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite « plus l'infini (on note $+\infty$) » en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_a f(x) = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite « moins l'infini (on note $-\infty$) » en a** si, lorsque x devient très proche de a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_a f = -\infty$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

3. Limite finie à droite (ou par valeurs supérieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim_{a^+} f = \ell$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \sqrt{x - 1}) = 2$$

4. Limite finie à gauche (ou par valeurs inférieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus petit que a , $f(x)$ devient lui aussi très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, -\eta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim_{a^-} f = \ell$.

5. Limite infinie à droite (ou par valeurs supérieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a^+} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ à droite en a** (ou encore, par valeurs supérieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, 0 < x - a < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{a^+} f = -\infty$.

6. Limite infinie à gauche (ou par valeurs inférieures)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a un point de I .

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, -\eta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a^-} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ à gauche en a** (ou encore, par valeurs inférieures) si, lorsque x devient très proche de a , en restant plus grand que a , $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel A strictement positif, il existe un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \eta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < -A$$

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{a^-} f = -\infty$.

Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

1. Limite finie d'une fonction en l'infini

Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$, et ℓ un réel.

On dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en « plus l'infini (on note $+\infty$) »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

Si f est définie sur un intervalle de la forme $] -\infty, a]$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$, et si ℓ désigne encore un réel, on dit que f **admet pour limite (finie) ℓ en « moins l'infini (on note $-\infty$) »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, $f(x)$ devient très proche de ℓ , ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{-\infty} f = \ell$.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = 1$$

2. Limite infinie d'une fonction en plus l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en « plus l'infini »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient lui aussi très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow f(x) > B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en « plus l'infini »** si, lorsque x devient très grand, $f(x)$ devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel « seuil », A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, x > A \Rightarrow f(x) < -B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$.

3. Limite infinie d'une fonction en moins l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -\infty, a]$ de \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite $+\infty$ en « moins l'infini »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, mais en étant à valeurs négatives, $f(x)$ devient lui aussi très grand, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow f(x) > B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

On dit que f **admet pour limite $-\infty$ en « moins l'infini »** si, lorsque x devient très grand en valeur absolue, en étant négatif, $f(x)$ devient aussi très grand en valeur absolue, en étant négatif, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A , strictement positif tel que :

$$\forall x \in] -\infty, a], x < -A \Rightarrow f(x) < -B$$

On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

4. Forme indéterminée

On appelle **forme indéterminée** une limite que l'on ne sait pas déterminer ; cela correspond donc à des quantités que l'on ne peut pas quantifier **de façon exacte**, comme, par exemple, le quotient de $+\infty$ avec $+\infty$.

Propriétés des limites

Opérations sur les limites

1. Propriétés des limites

► Unicité de la limite

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . Si f possède une limite en a , celle-ci est unique.

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , a un point de I , et ℓ dans \mathbb{R} .

Alors, si f est définie dans un voisinage à gauche de a , et dans un voisinage à droite de a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$

- Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; m et M sont deux réels. Alors :

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < M$, il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage :

$$f(x) < M$$

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > m$, il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage :

$$f(x) > m$$

► Limites et comparaison

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; m et M sont deux réels. Alors, si f et g ont des limites finies en a , et s'il existe un voisinage \mathcal{V} de a tel que, pour tout x de ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x)$$

on a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

► Limites et minoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage,

$$f(x) \leq g(x)$$

et si, de plus, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

► Limites et majoration

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) \geq g(x)$, et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

► Théorème des gendarmes

Soient f et g et h trois fonction définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ est un réel. S'il existe un voisinage de a tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, et si, de plus, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$, alors : $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$

2. Opérations sur les limites

► Limite d'une somme de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ et ℓ' sont deux réels finis. Alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

► Limite d'un produit de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ et ℓ' sont deux réels. Alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell \ell'$
ℓ , avec $\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
ℓ , avec $\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	Forme indéterminée
0	$-\infty$	Forme indéterminée

► Limite d'un quotient de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} ; ℓ et ℓ' sont deux réels. Alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	ℓ' , avec $\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$	0
ℓ	$-\infty$	0
ℓ , avec $\ell > 0$	0^+	$+\infty$
ℓ , avec $\ell > 0$	0^-	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	0^+	$-\infty$
ℓ , avec $\ell < 0$	0^-	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Notations de Landau

1. Négligeabilité

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} .

On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a . On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{=} o(g)$$

On dit que f est un « petit o » de g au voisinage de a .



La notation « petit o », de même que la notation « grand O », qui sera vue plus loin, est appelée **notation de Landau**, en hommage au mathématicien Edmund Landau¹. Leur paternité est visiblement assez controversée, et reviendrait, a priori, à Paul Bachmann².

Exemple

On considère les fonctions f et g définies, pour tout réel x , par

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x^4$$

Alors, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on en déduit : $f \underset{+\infty}{=} o(g)$.



Pour traduire le fait qu'une fonction f possède une limite nulle en a , $a \in \mathbb{R}$, ou, éventuellement, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, on écrit aussi :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$$

2. Domination

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , et a dans \bar{I} . On suppose que g ne s'annule pas dans un voisinage de a , sans, pour autant, que $g(a)$ soit non nul.

1. Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938), mathématicien allemand, spécialiste de théorie des nombres.
2. Paul Bachmann (1837-1920), mathématicien allemand lui aussi, et également spécialiste de théorie des nombres.